AGOSTO 2024 **TEMA 1** PRIMER PARCIAL ANÁLISIS MATEMÁTICO II

APELLIDO Y NOMBRES:...D.N.I.:....................

TEÓRICO 1	TEÓRICO 2	PRÁCTICO 1	PRÁCTICO 2	PRÁCTICO 3	PRÁCTICO 4

TEÓRICO 1: a) Enuncie el teorema de Cauchy-Dini, para un campo escalar de 3 variables, indicando claramente sus hipótesis, y demuestre cómo se llega a la expresión que permite calcular $\frac{\partial f}{\partial y}$, a partir de la expresión: $F_{(x,y,z)} = 0$, que define implícitamente a $z = f_{(x,y)}$. b) Aplicando el ítem anterior, obtenga $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)$, para $z = f_{(x,y)}$, definida implícitamente en: $xyz + \ln(xyz) - z = 0$.

TEÓRICO 2: a) Muestre cómo se obtiene las ecuaciones de las funciones $u_{(x)}$ y $v_{(x)}$, que forman parte de la solución propuesta por el método de Lagrange, para las ecuaciones diferenciales ordinarias, lineales, de primer orden. b) Encuentre la solución general de $y' + 5y = e^{-x}$, aplicando el método de Lagrange (utilice las fórmulas que obtuvo en a), directamente).

PRÁCTICO 1: Analice la existencia de extremos y puntos silla de $f_{(x,y)} = \frac{8x^3}{3} - x^4 + 4y^3 - y^4$.

PRÁCTICO 2: Determine si la siguiente función es contínua en el origen:

$$f_{(x,y)} = \begin{cases} \dfrac{5x^3}{2x+y} & si \ \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \ \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

PRÁCTICO 3: Obtenga la ecuación del plano tangente a $S: x^2 + y^2 + z - 8 = 0$, en el punto $\overline{P} = (1,2,3)$.

PRÁCTICO 4: Dar la expresión del polinomio de Taylor de orden 2, que aproxima a $f_{(x,y)} = e^{-x^2-y^2}$, en un entorno del punto $\overline{X_0} = (0,0)$

AM 2	1° parcial	tema 1 Prof Moyano	HOJA 1 /3 FECHA Agosto '12

T1 a) Enunciar el teorema de Cauchy-Dini para un campo escalar de 3 variables, indicando, claramente, las hipótesis y demostrar cómo se llega a la expresión que permite calcular $\frac{\partial f}{\partial y}$ a partir de la expresión $F(x,y,z)=0$ que define, implícitamente, a $z=f(x,y)$

Sea $F:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ / $F(x,y,z)=0$ es la sup. de nivel 0 de F

y $F \in C^1(\mathbb{R}^3)$

si $z=f(x,y) \Rightarrow F'_z \neq 0$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{F'_x\,(x_0,y_0,f(x_0,y_0))}{F'_z\,(x_0,y_0,f(x_0,y_0))}$$

b) Aplicando el ítem anterior, obtener $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)$ y $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)$ para $z=f(x,y)$ definida implícitamente en $xyz+\ln(xyz)-z=0$

$$F(x,y,z) = xyz+\ln(xyz)-z$$

- $F(1,1,z)=0 = 1\times1\times z+\ln(1\times1\times z)-z \longrightarrow z=1$

$$F'_z(1,1,1) = xy+\frac{xy}{xyz}-1\Big|_{(1,1,1)} = 1+1-1=1\neq 0$$

$$F'_x = yz+\frac{yz}{xyz} \longrightarrow F'_x(1,1,1)=2$$

$$F'_y = xz+\frac{xz}{xzy} \longrightarrow F'_y(1,1,1)=2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = -\frac{F'_x(1,1,1)}{F'_z(1,1,1)} = -\frac{2}{1} = -2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -\frac{F'_y(1,1,1)}{F'_z(1,1,1)} = -\frac{2}{1} = -2$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)=\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)=-2}$$

NOTA

T2 a) Mostrar cómo se obtienen las ecuaciones de las funciones $u(x)$ y $v(x)$ que forman parte de la solución propuesta por el método de Lagrange para las ecuaciones diferenciales ordinarias, lineales, de primer orden

sea $$P(x)\, y + Q(x)\, y' = R(x)$$

una EDO lineal de primer orden $\Rightarrow$ Método Lagrange: $y = u(x)\, v(x)$

$$y = u(x) \cdot v(x) \Longrightarrow y' = u'(x)\, v(x) + u(x)\, v'(x)$$

$$\Rightarrow \quad P(x)\, u(x)\, v(x) + Q(x)\left(u'(x)\, v(x) + u(x)\, v'(x)\right) = R(x)$$

$$\Rightarrow \quad u(x)\, \underbrace{\left(P(x) \cdot v(x) + Q(x)\, v'(x)\right)}_{=0} + Q(x)\, u'(x)\, v(x) = R(x)$$

$$\begin{cases} P(x)\, v(x) + Q(x)\, v'(x) = 0 & \text{I} \\ Q(x)\, u'(x)\, v(x) = R(x) & \text{II} \end{cases}$$

$$v = e^{-\int \frac{P}{Q}}$$

I) $P(x)\, v(x) = -Q(x)\, v'(x) \longrightarrow \dfrac{P(x)}{-Q(x)} = \dfrac{v'(x)}{v(x)} \rightarrow$ se integra m a m

se obtiene $v(x)$

II) $Q(x)\, u'(x)\, v(x) = R(x)$

$$u'(x) = \frac{R(x)}{Q(x)\, v(x)} \longrightarrow \text{se integra m.a.m} \rightarrow \text{se obtiene } u(x)$$

$\rightarrow$ con constante arbitraria

$$u(x) = \int \frac{R(x)}{Q(x)\, v(x)} \qquad \boxed{y = u(x) \cdot v(x)}$$

b) Encontrar la sol. general de $y' + 5y = e^{-x}$ aplicando el método de Lagrange (utilizar las fórmulas anteriormente)

$$y' + 5y = e^{-x} \Rightarrow Q(x) = 1, \quad P(x) = 5, \quad R(x) = e^{-x}$$

$$v(x) = e^{-\int \frac{5}{1} dx} = \boxed{e^{-5x} = v(x)}$$

$$u(x) = \int \frac{e^{-x}}{1 \cdot e^{-5x}}\, dx = \int e^{4x}\, dx = \boxed{\frac{e^{4x}}{4} + c = u(x)}$$

$$y(x) = e^{-5x}\left(\frac{e^{4x}}{4} + c\right) = \boxed{\frac{e^{-x}}{4} + c\, e^{-5x} = y(x)}$$

NOTA

AM 2	1° parcial	tema 1 Prof. Moyano	HOJA N° 2/3 FECHA Agosto/24

P1 Analizar la existencia de extremos y punto silla de

$$f_{(x,y)} = \frac{8x^3}{3} - x^4 + 4y^3 - y^4$$

f es diferenciable $\Rightarrow$ hallo $(x,y) = PC \;/\; \bar{\nabla} f_{(x,y)} = (0,0)$

$$\begin{cases} f'_x = 0 = 8x^2 - 4x^3 = 4x^2(2-x) \longrightarrow x = 0 \lor x = 2 \\ f'_y = 0 = 12y^2 - 4y^3 = 4y^2(3-y) \longrightarrow y = 0 \lor y = 3 \end{cases}$$

$PC_1 = (0,0)$ $\quad PC_2 = (0,3)$ $\quad PC_3 = (2,0)$ $\quad PC_4 = (2,3)$

Criterio del hessiano

$$\begin{cases} f''_{xx} = 16x - 12x^2 \\ f''_{xy} = 0 \\ f''_{yy} = 24y - 12y^2 \end{cases} \longrightarrow H_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 16x - 12x^2 & 0 \\ 0 & 24y - 12y^2 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} |H(PC_1)| = |H_{(0,0)}| = 0 \\ |H(PC_2)| = |H_{(0,3)}| = 0 \\ |H(PC_3)| = |H_{(2,0)}| = 0 \end{array}\right\} \text{el criterio no decide}$$

$f_{(0,0)} = 0$, $f(0, 0.1) > 0$, $f(0, -0.1) < 0$ $\Big\}$ Punto silla $(0, 0, f_{(0,0)})$

$f(0,3) = 27$, $f(0.1, 3) > 27$, $f(-0.1, 3) < 27$ $\Big\}$ Punto silla $(0, 3, f(0,3))$

$$|H_{(2,3)}| = \begin{vmatrix} -16 & 0 \\ 0 & -36 \end{vmatrix} > 0 \rightarrow \text{hay extremo},\ f''_{xx} = -16 < 0 \Rightarrow f \text{ alcanza máx en } f_{(2,3)}$$

$\boxed{\text{f alcanza un máximo local en (2,3) y toma valor } 97/3}$

$f_{(2,0)} = 16/3$, $f(2, 0.1) > 16/3$, $f(2, -0.1) < 16/3$ $\Big\}$ Punto silla $(2, 0, f_{(2,0)})$

NOTA

P2 Determinar si la seg. función es continua en el origen:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{5x^3}{2x+y} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- $f(0,0) = 0$
- ¿$\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$? $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{5x^3}{2x+y} \xrightarrow{si\ x=0} \lim = 0$

si $y = 5x^3 - 2x$

$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{5x^3}{\cancel{2x}+5x^3-\cancel{2x}} = 1$

$\neq$

$\nexists \lim$

$$\boxed{\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \Rightarrow f \text{ NO es cont. en } (0,0)}$$

P3 Obtener la ec. del plano tang. a $S: x^2+y^2+z-8=0$ en $\bar{P} = (1,2,3)$

$G(x,y,z) = x^2+y^2+z-8 \Rightarrow S$ es la sup de nivel 0 de G

$\Rightarrow N_{S\bar{P}} \parallel \bar{\nabla} G(\bar{P})$

$\bar{\nabla} G_{(x,y,z)} = (2x, 2y, 1) \longrightarrow \bar{\nabla} G_{(1,2,3)} = (2,4,3)$

$$N\,(x,y,z) = N\bar{P}$$

$$(2,4,3)\,(x,y,z) = (2,4,3)\,(1,2,3)$$

$$\boxed{2x+4y+3z = 19}$$

NOTA

AM2	1° parcial	Tema 1 Prof. Moyano	HOJA N° 3/3 FECHA Agosto/24

(P4) Dar la expresión del polinomio de taylor de orden 2 que aproxima $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$ en un entorno a $\bar{x}_0 = (0,0)$

$f_{(0,0)} = 1$

$f'_{x(0,0)} = -2x\, e^{-x^2-y^2}\Big|_{(0,0)} = 0$

$f'_{y(0,0)} = -2y\, e^{-x^2-y^2}\Big|_{(0,0)} = 0$

$f''_{xx} = -2e^{-x^2-y^2} - 2x(-2x)\, e^{-x^2-y^2} \rightarrow f''_{xx(0,0)} = -2$

$f''_{yx} = -2x\,(-2y)\, e^{-x^2-y^2} \rightarrow f''_{yx(0,0)} = 0$

$f''_{yy} = -2\, e^{-x^2-y^2} - 2y\, e^{-x^2-y^2}(-2y) \rightarrow f''_{yy(0,0)} = -2$

$$P_2(x,y) = \underbrace{f_{(0,0)}}_{1} + \underbrace{f'_{x(0,0)}}_{0} x + \underbrace{f'_{y(0,0)}}_{0} y + \frac{1}{2}\left[\underbrace{f''_{xx(0,0)}}_{-2} x^2 + 2\underbrace{f''_{yx(0,0)}}_{0} xy + \underbrace{f''_{yy(0,0)}}_{-2} y^2\right]$$

$$\boxed{P_2(x,y) = 1 - x^2 - y^2}$$

NOTA